2010.03.15

SU-FreeSBIE で実験データを解析する

第１回　最小自乗法の原理と使い方

摂南大学 理工学部 電気電子工学科　井上雅彦
参考：http://sprite.eng-scl.setsunan.ac.jp/sst_lab/2009/lms-1.html

抵抗器に電源を接続して電流 I を流すと，抵抗器の両端に電流に比例した電圧 $V = R \cdot I$ が発生します。これが皆さん良くご存じの**オームの法則**です。この時の比例定数 R は電流の流れにくさ，すなわち電気抵抗に対応しています。この電気抵抗を実験により求めてみましょう。抵抗器に直列に電流計，並列に電圧計を入れ，電流と電圧の関係を測定しました。可変電源の出力を調整して，電流の値を $I_1 = 2.0$A, $I_2 = 4.0$A, $I_3 = 6.0$A, $I_4 = 8.0$A に設定し，それぞれの電流設定値に対して電圧 V_1〜V_4 を測定しました。結果を表 1 に示します。

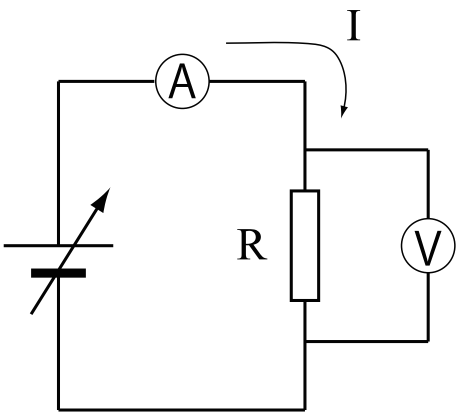

図 1: オームの法則 $V = RI$

表 1: 実験結果

データ番号 i	（設定値）電流 I_i〔A〕	（測定値）電圧 V_i〔V〕
1	2.0	0.8
2	4.0	4.2
3	6.0	5.8
4	8.0	6.0

これをグラフにプロットしましょう。もしオームの法則が成立しているならば，データポイントはすべて原点を通る一本の直線上にきれいに乗るはずですが，実際には測定値には色々な誤差が含まれており，うまく一本の直線に乗ってくれません。できるだけすべてのデータポイントからはずれないような直線を決定できれば，その傾きが最も確からしい電気抵抗の値ということになります。

仮に最も確からしい直線の方程式が $V = R \cdot I$ だったとします。i 番目の電流設定値 I_i に対して，直線上に乗っている理論値は $R \cdot I_i$ ですが，実際に測定された値は V_i で，これらのずれは $RI_i - V_i$ となります。これを **残差**とよびます。データ全体でのずれはこのずれの和となりますが，残差は正にも負にもなりますので，そのまま足すとまずいです。例えば大きくずれた正の値と負の値が打ち消しあえば全体ではずれが小さくなってしまいます。そこで残差を二乗（= 自乗）して足しあわせることにします。これを**残差自乗和** (残差二乗和）とよびます。展開すると次のようになります。

$$
\begin{aligned}
S(R) &= \Sigma_{i=1}^{4}(R \cdot I_i - V_i)^2 \\
&= \Sigma_{i=1}^{4}(R^2 I_i^2 - 2RI_iV_i + V_i^2) \\
&= R^2\Sigma_{i=1}^{4} I_i^2 - 2R\Sigma_{i=1}^{4}(I_iV_i) + \Sigma_{i=1}^{4} V_i^2
\end{aligned}
$$

Σ 記号のところがややこしく見えますが，要するにこれは数値を足しあわせたものですから，単なる数値です。従って，$S(R)$ は R の二次関数で，かつ二次の項の係数が $\Sigma I_i^2 > 0$ ですので，

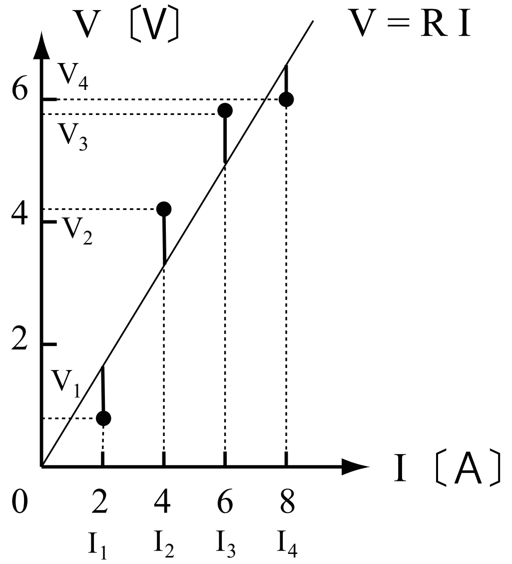

図 2: 測定結果のグラフ

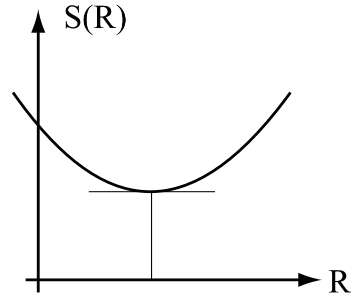

図 3: 残差二乗和 S(R) のグラフ

グラフは下に凸となり，必ず最小値を持ちます。$S(R)$ を最小にする R を見つければ，これが最も確からしい直線の傾きということになります。最小値においては二次曲線の接線の傾きが 0 となりますので，

$$\frac{dS(R)}{dR} = 0 = 2R\Sigma_{i=1}^{4} I_i^2 - 2\Sigma_{i=1}^{4}(I_i V_i)$$

$$\therefore R = \frac{\Sigma_{i=1}^{4}(I_i V_i)}{\Sigma_{i=1}^{4} I_i^2}$$

このときデータポイントと直線のずれの総和が最小となります。残差自乗和を最小にするという意味で，この手法を**最小自乗法**とよんでいます。

データポイント数が 4 個と少ないので，まずは電卓を使って計算してみましょう。表 1 をもとにして表 2 を作成します。それぞれのデータポイントについて，I_i^2 と $I_i V_i$ の値を計算し，それを足しあわせることで ΣI_i^2 と $\Sigma I_i V_i$ を計算し，表を完成させせます。この結果を使って，

$$R = \frac{101.2}{120.0} = 0.84〔\Omega〕, \quad V = 0.84 \cdot I$$

という結果が出てきます。この値は 4 個のデータをフルに活用して求められた値であることに注目してください。また，この R の値を使って理論値（表 2 の最右側の列）を計算できます。

表 2: 計算

データ番号 i	（設定値）電流 I_i〔A〕	I_i^2	（測定値）電圧 V_i〔V〕	$I_i V_i$	（理論値）RI_i
1	2.0	4.0	0.8	1.6	1.52
2	4.0	16.0	4.2	16.8	3.04
3	6.0	36.0	5.8	34.8	4.56
4	8.0	64.0	6.0	48.0	6.08
合計		$\Sigma I_i^2 = 120.0$		$\Sigma I_i V_i = 101.2$	

さて，ここで求めた直線が本当に最も確からしいものになっているか，実際にグラフを描いて確認してみましょう。Windows をお使いの方は **VMwarePlayer** （フリーウエア）を使って，また MacOSX をお使いの方は **VMwareFusion**（有償）を使って **SU-FreeSBIE** を起動して下さい。SU-FreeSBIE は FreeBSD という UNIX 系の OS に，多くの有用なソフトウエアをインストールしたもので，必要な設定は完了しておりますので，起動するだけで使える状態となっています。VMware を使って起動すると Windows あるいは MacOSX のソフトウエアと同時に利用できるので便利です。(詳細は，http://sprite.eng-scl.setsunan.ac.jp/sst_lab/2006/su-freesbie.html 参照。)

まず，汎用テキストエディタ **gEdit** を使ってデータファイルを作ります。一行に 電流と電圧の値を並べて書いてゆきます。電流と電圧の間はコンマ＋スペースで区切ってください。これを test.dat という名前で保存しましょう。エンコーディングは念のため EUC-JP としておきます。

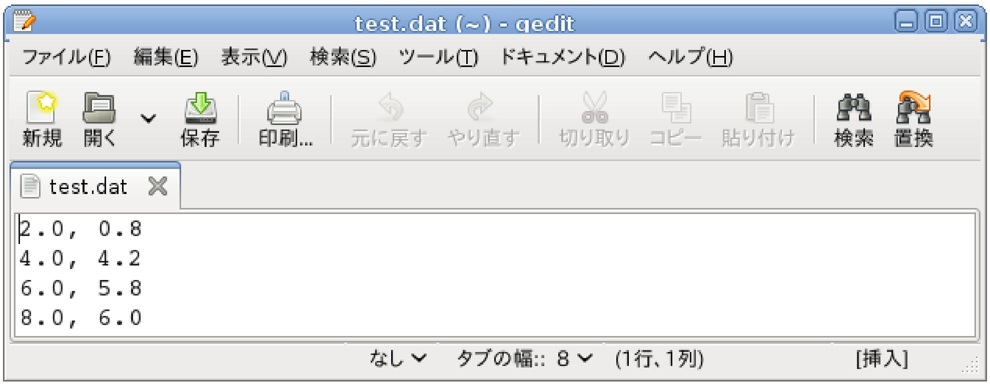

図 4： 汎用テキストエディタ gEdit によるデータファイルの作成（ test.dat ）

次にグラフ作成ソフト **Ngraph** を起動し，メニューから「データ」→「開く」で，test.dat を選択します。グラフの設定画面が現れますが，取り合えず「ＯＫ」ボタンを押してください。続いて「Draw」ボタンを押すと自動設定でグラフが表示されます。まず軸設定をしましょう。メニューから「軸」→「設定」で，横軸の場合は fX1 を，縦軸の場合は fY1 を選択し，それぞれ最小値，最大値を設定してください。今回は，横軸は最小値 0，最大値 10，また縦軸は最小値 0，最大値 7 としています。「Draw」ボタンを押せば，縦横の軸が再設定され，グラフの原点が表示されているのが確認できます。

続いて最小自乗法で決定した直線を引きます。メニューから「データ」→「開く」でもう一度 test.dat を選択します。グラフの設定画面にて，「変換数式」をクリックし，(X）の変換数式の欄に x を，また （Y）の変換数式の欄に x * 0.84（0.84 は最小自乗法で決定した R の値） を入力し，「ＯＫ」をクリックします。そしてグラフの「タイプ」として「line」を選択してください。「Apply all」でダイアログウインドを閉じ，「Draw」をクリックして再描画してください。今回決定した直線が原点を通り，なおかつデータポイントの間をうまく通過している様子が確認できたましたね。今回はデータポイント数が 4 個と少なかったので電卓で計算できましたが，データポイント数が多くなってくると電卓使った手計算では大変ですし，間違える可能性が大です。そこで次回は C 言語を使って最小自乗フィッティングのプログラムを作成してみましょう。

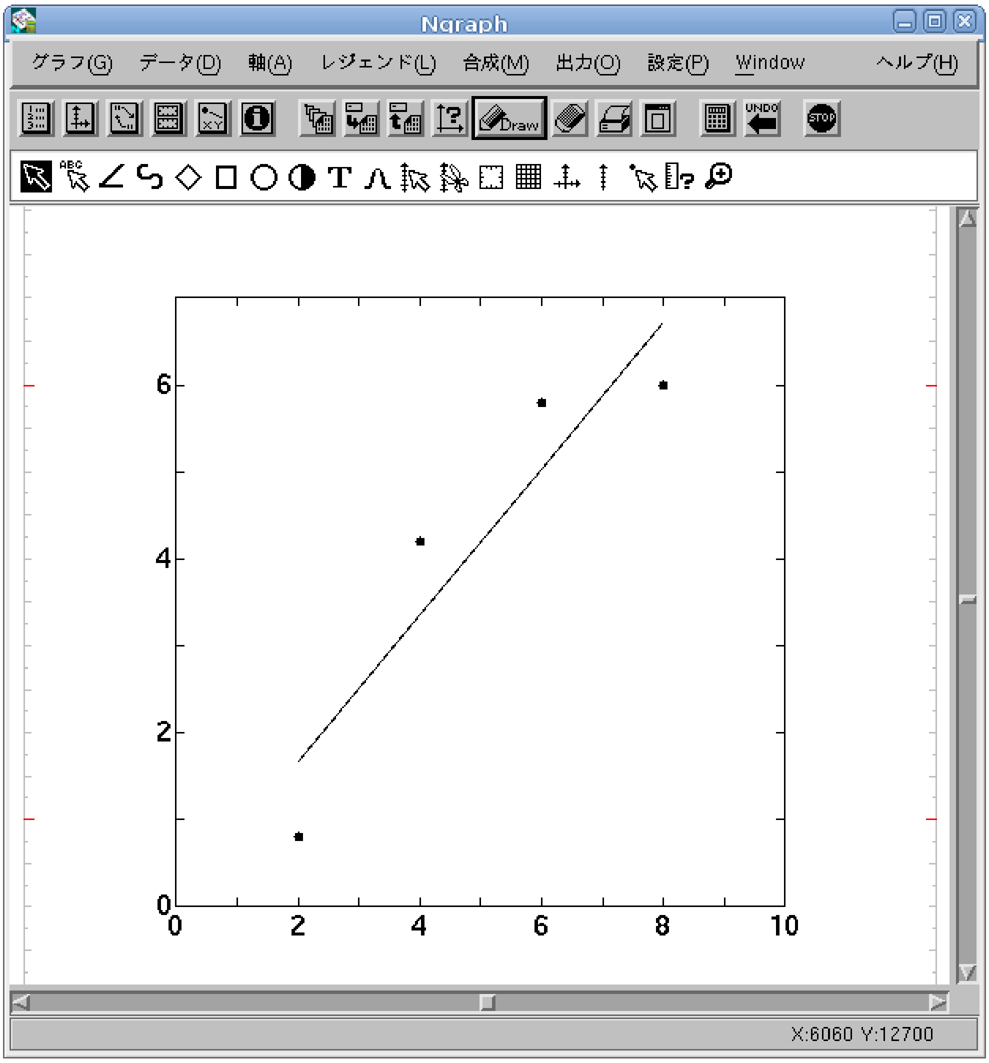

図 5: グラフ作成ソフト Ngraph によるグラフ描画

練習問題

図 1 と同じ回路で抵抗器を別の物と交換して同様の実験を行い，表 3 のようなデータが得られた。表を完成させ，電気抵抗 R の値を求めよ。また，データポイントと推定した直線をグラフに描け。

表 3: 計算

データ番号 i	(設定値) 電流 I_i〔A〕	I_i^2	(測定値) 電圧 V_i〔V〕	I_iV_i	(理論値) RI_i
1	2.0		9.5		
2	4.0		18.0		
3	6.0		33.0		
4	8.0		45.0		
5	10.0		47.0		
合計		$\Sigma I_i^2 =$		$\Sigma I_iV_i =$	

$$R = \frac{\Sigma(I_iV_i)}{\Sigma I_i^2} = \underline{\qquad\qquad} = \qquad\qquad 〔\Omega〕$$

以上