

# 入学前プログラム数学添削問題の準備 5 回目

## 5 指数と対数

指数法則  $a, b$  を正の数とします. 指数関数  $y = a^x$  には次の指数法則という性質があります.

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & a^p \times a^q = a^{p+q} \\ \text{ii)} & \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \\ \text{iii)} & (a^p)^q = a^{pq} \\ \text{iv)} & (ab)^p = a^p b^p \end{array}$$

まず累乗  $a^1 = a, a^2 = a \times a, a^3 = a \times a \times a, \dots$ , を考えると  $p, q$  が正の整数のときに i) ~ iv) が示せます. この性質がなりたつようにすべての実数  $x$  に指数を拡張した関数が指数関数  $a^x$  でした. たとえば ii) で  $p = q$  として  $a^0 = 1$ , また  $p = 0, q = n$  として  $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$  として拡張されたこと, また iii) で  $p = \frac{1}{n}, q = n$  とすると

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a \text{ の } n \text{ 重根,}$$

さらに

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

もわかります.

例題 次の値を求めなさい.

$$(1) \sqrt{8} \times \sqrt{2} \qquad (2) (\sqrt{3})^3 \div 9^{\frac{3}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$$

(解) (1) 与式  $= 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^2 = 4.$

(2) 与式  $= 3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{-3} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}-3-\frac{1}{2}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}.$

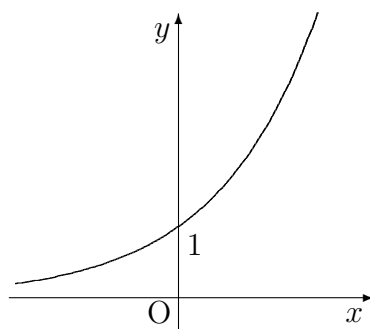
指数関数の性質  $a > 1$  として指数関数  $y = a^x$  を考えます.

$$2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \dots, \quad 2^{10} = 1024, \dots$$

から想像がつくように  $a^x$  は  $x$  とともにいくらでも大きくなります. また

$$2^{-2} = \frac{1}{4}, \quad 2^{-3} = \frac{1}{8}, \quad 2^{-4} = \frac{1}{16}, \dots, \quad 2^{-10} = \frac{1}{1024}, \dots$$

から  $x < 0$  では  $a^x$  はいくらでも小さくできて  $x$  軸の左方では 0 に近づくこともわかります. このように,  $a > 1$  ならば  $a^x$  は増加しながらすべての正の値をとってゆきます. ( $y = a^x$  のグラフは右図)



対数の定義ここでみたように正数  $A$  をあたえると  $a^r = A$  となる実数  $r$  (指数関数に代入すると値が  $A$  になる実数) がかならず1つあります. この  $r$  を

$$a \text{ を底とする } A \text{ の対数 といひ } \log_a A$$

と書きます.

$$a^r = A \iff r = \log_a A$$

例えば  $a^1 = a$ ,  $a^0 = 1$  だから  $\log_a a = 1$ ,  $\log_a 1 = 0$  となります.

対数の公式このように指数関数から対数が定義されましたから, 指数法則を引きついだ公式を対数はみたしています.  $A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $b > 0$  とすると

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \log_a AB = \log_a A + \log_a B & \text{ii)} \quad \log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B \\ \text{iii)} \quad \log_a A^q = q \log_a A & \text{iv)} \quad \log_b A = \frac{\log_a A}{\log_a b} \end{array}$$

$\log_a A = p$ ,  $\log_a B = q$  とおくと  $A = a^p$ ,  $B = a^q$  ですから指数法則 i) により  $AB = a^p a^q = a^{p+q}$ , 対数の決め方から  $p+q = \log_a AB$ , これで i) が導けました. ii) も同様です. iii) も指数法則 iii) から  $A^q = (a^p)^q = a^{pq}$ , 対数の決め方から  $pq = \log_a A^q$ , この左辺に  $p = \log_a A$  を入れれば iii) になります.  $r = \log_b A$  とおくと  $A = b^r$ ,  $b = a^{\log_a b}$  ですから  $A = b^r = (a^{\log_a b})^r = a^{r \log_a b} = a^p$ , 従って  $r \log_a b = p$  となり iv) が導けました.

例題 次の式を  $a^n$  の形に表しなさい.

$$(1) \sqrt[3]{a\sqrt{a}} \quad (2) (\sqrt[3]{a} \times \sqrt[6]{a})^2 \div \sqrt{a^3}$$

$$\text{(解)} \quad (1) \sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$(2) (\sqrt[3]{a} \times \sqrt[6]{a})^2 \div \sqrt{a^3} = \left(a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}\right)^2 \cdot a^{-\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{3}{2}} = a^{-\frac{1}{2}}$$

例題 次の値を求めなさい.

$$(1) \log_8 4 \quad (2) \log_9 \sqrt{27}$$

$$\text{(解)} \quad (1) p = \log_8 4 \text{ とおくと対数の決め方から } 8^p = 4. 8 = 2^3, 4 = 2^2 \text{ より } (2^3)^p = 2^2$$

$$\text{, } 2^{3p} = 2^2. \text{ 指数をくらべて } p = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

$$(2) p = \log_9 \sqrt{27} \text{ とおくと } 9^p = \sqrt{27}, 9 = 3^2, 27 = 3^3 \text{ より } 3^{2p} = 3^{\frac{3}{2}}. \text{ これから}$$

$$p = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}.$$

## 数学添削問題 第5回

氏名 : \_\_\_\_\_

高校名 : \_\_\_\_\_

入学予定学科 : \_\_\_\_\_

1 次の式の値を求めなさい.

(1)  $(2^5 \times 4^3) \div (8^3 \times 64)$  (2)  $\sqrt[5]{72}\sqrt[5]{108}$

(3)  $4^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{1}{6}}$  (4)  $\sqrt{\sqrt[3]{64^2}}$

2  $a > 0$  のとき次の式を  $a^p$  の形に表わしなさい.

(1)  $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$  (2)  $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$

(3)  $\sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[6]{a} \div \sqrt{a}$  (4)  $\sqrt{a^4 \times \sqrt{a}}$

□3 次の対数の値を計算しなさい.

(1)  $\log_2 32$       (2)  $\log_3 \frac{1}{81}$

(3)  $\log_4 128$       (4)  $\log_2 192 - \log_2 12$

□4  $\log_{10} 2 = a$ ,  $\log_{10} 3 = b$  とするとき, 次の値を  $a$ ,  $b$  の簡単な式で表わしなさい.

(1)  $\log_{10} 6$       (2)  $\log_{10} 48$       (3)  $\log_{10} 5$       (4)  $\log_2 3$



(4) 今回の添削問題に関する質問を以下にお書きください。

(5) 今回の添削問題に関する感想を以下にお書きください。

★ アンケートにご協力頂きありがとうございました。