

入学前プログラム数学添削問題の準備 4 回目

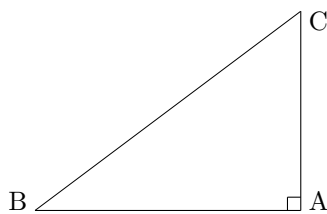
4 三角比

三平方の定理 $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形

$\triangle ABC$ では辺の長さの間に

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

が成り立ちます。

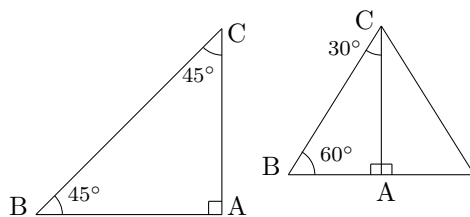


$AB=AC=1$ の直角 2 等辺三角形では

$$BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

となり $BC = \sqrt{2}$ がわかります。

一辺の長さが 1 の正三角形の頂角を



2 等分してえられる直角三角形 ABC を考えます。 $BC = 1$, $AB = \frac{1}{2}$ ですから,

三平方の定理により

$$1^2 = AC^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad AC^2 = \frac{3}{4}$$

となり $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ がわかります。

三角比 右図の三つの直角三角形 $\triangle OAB$, $\triangle OA_1B_1$, $\triangle OA_2B_2$ は

は互いに相似で, 対応する辺の長さの間には

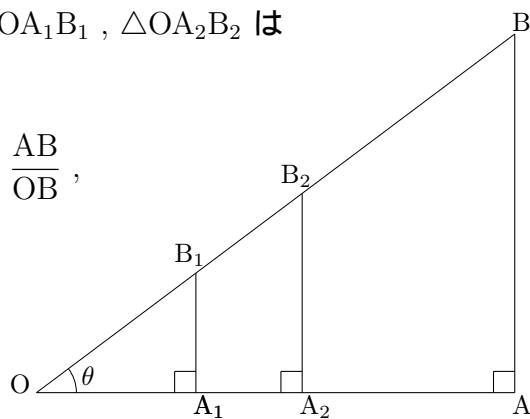
$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA}{OB}, \quad \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{AB}{OB},$$

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{AB}{OA}$$

が成り立っています。このように

角の大きさ θ だけで定まる直角三角形の

辺の長さの比を



$$\cos \theta = \frac{OA}{OB}, \quad \sin \theta = \frac{AB}{OB}, \quad \tan \theta = \frac{AB}{OA} \dots (I)$$

と表わし、それぞれ コサイン、サイン、タンジェント と読む、というのが三角比 の定義でした。

先に挙げた2つの直角三角形の例から

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan 45^\circ = 1, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

がわかります。

相互の関係 (I) から $OA = OB \cos \theta$, $AB = OB \sin \theta$ となるので

$$\tan \theta = \frac{OB \sin \theta}{OB \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta},$$

また三平方の定理 $OB^2 = OA^2 + AB^2$ に代入して ($\sin^2 \theta = (\sin \theta)^2$, $\cos^2 \theta = (\cos \theta)^2$ として)

$$OB^2 = OB^2(\cos \theta)^2 + OB^2(\sin \theta)^2, \quad 1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

が成立します。また $\angle OBA = 90^\circ - \theta$ だから

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{OB}{AB} = \sin \theta, \quad \sin(90^\circ - \theta) = \frac{OA}{OB} = \cos \theta, \quad \tan(90^\circ - \theta) = \frac{OA}{AB} = \frac{1}{\tan \theta}$$

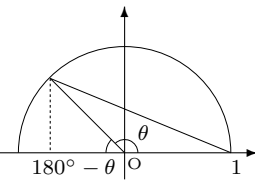
が成り立ちます。まとめておくと

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta, \quad \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta, \quad \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}.$$

鈍角の三角比 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ の場合は、右図のように

頂点が y 軸の左にくると考えて

$$\cos \theta = -\cos(180^\circ - \theta), \quad \sin \theta = \sin(180^\circ - \theta)$$


とします。例えば

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = -\sqrt{3}.$$

例題 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, $\tan \theta = p$ のとき $\cos \theta$, $\sin \theta$ を p で表わしなさい。

(解) $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = p$ から $\sin \theta = p \cos \theta$. これを $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ に代入して

$$(1 + p^2) \cos^2 \theta = 1, \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + p^2}.$$

平方根をとって $\cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$ をえるが, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ より $\cos \theta \geq 0$ なので

$$\underline{\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}}, \quad \underline{\sin \theta = p \cos \theta} \text{ にこれを代入して } \underline{\sin \theta = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}}.$$

数学添削問題 第4回

氏名 : _____

高校名 : _____

入学予定学科 : _____

1 次の値を求めなさい.

(1) $\cos 30^\circ$ (2) $\sin 30^\circ$ (3) $\tan 30^\circ$ (4) $\cos 150^\circ$

(5) $\sin 150^\circ$ (6) $\tan 150^\circ$ (7) $\cos 135^\circ$ (8) $\sin 135^\circ$

(9) $\cos 0^\circ$ (10) $\sin 0^\circ$ (11) $\tan 0^\circ$ (12) $\cos 180^\circ$

2 $90^\circ < \theta < 180^\circ$, $\sin \theta = \frac{3}{5}$ のとき $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めなさい.

3 $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$ のとき $\cos \theta$, $\sin \theta$, $\tan \theta$ の値を求めなさい。(ヒント : $\cos \theta = \sqrt{2} - \sin \theta$ を用いて , 相互関係 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ から $\cos \theta$ を消去する)

4 $\triangle ABC$ において, $AB=BC=2$, $\angle ABC=120^\circ$ であるとき, 辺 AC の長さ と $\triangle ABC$ の面積を求めなさい .

5 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき $2\sin^2 \theta + \cos \theta = 1$ をみたす θ を求めなさい .

数学問題第4回アンケート(必要事項を記入し、ご回答下さい。)

氏名： _____

自宅住所： _____

高校名： _____

(1) 今回の問題で感じた難易度を聞かせてください。

問1 1. 難しい 2. やや難しい 3. 標準 4. 易しい 5. とても易しい

問2 1. 難しい 2. やや難しい 3. 標準 4. 易しい 5. とても易しい

問3 1. 難しい 2. やや難しい 3. 標準 4. 易しい 5. とても易しい

問4 1. 難しい 2. やや難しい 3. 標準 4. 易しい 5. とても易しい

問5 1. 難しい 2. やや難しい 3. 標準 4. 易しい 5. とても易しい

(2) 添付DVDはご覧になりましたか？

1. ビデオを見ることができた 2. できなかった

3. 2の場合の理由 ()

(3) 問題を解く上でビデオは

1. 参考になった 2. 普通 3. 参考にならなかった

裏面に続きます。

(4) 今回の添削問題に関する質問を以下にお書きください。

(5) 今回の添削問題に関する感想を以下にお書きください。

★ アンケートにご協力頂きありがとうございました。