

入学前プログラム数学添削問題の準備 2回目

2 2次方程式

平方根 正の数 a にたいして、2乗すると a になる 正の数 を \sqrt{a} と表わしました。

($\sqrt{\quad}$ は根号という記号.)

例 $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{0.01} = 0.1$, $\sqrt{3} = 1.7320508\cdots$

0 については $\sqrt{0} = 0$ とします。

$a > 0$ のとき $x^2 = a$ をみたく x の値は \sqrt{a} , $-\sqrt{a}$ の2つがあり、これらを a の平方根とよんで $\pm\sqrt{a}$ と表わします。

2次方程式の解き方

(I) 平方根をつかって解けるとき

i) $x^2 = 9$ の解は $\sqrt{9} = 3$ より ± 3 .

ii) $2x^2 = 1$ は $x^2 = \frac{1}{2}$ として解は $\pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

iii) $(x+1)^2 = 3$ は両辺の平方根を取り $x+1 = \pm\sqrt{3}$, 1 を移項して $x = -1 \pm \sqrt{3}$ が解 .

(II) 因数分解がつかえるとき

カケ算の結果 $AB = 0$ となるのは $A = 0$ か $B = 0$ のときです . 2次式が $(x-a)(x-b)$ と因数分解できれば $(x-a)(x-b) = 0$ となるのは $x-a = 0$ または $x-b = 0$ のときですから $x = a, b$ が解になります .

因数分解には乗法の展開の公式を逆の向きに利用します .

$$1. x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

$$2. x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$$

$$3. x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

$$4. x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$$

$$5. x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$$

(III) 因数分解が難しそうなき

解の公式をつかいます . 公式を導くときに行なう変形 (平方完成) は2次式の取り扱いの基本です . 復習しておきましょう .

1) $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) の両辺を a で割り左辺第3項を移項 $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ (*)

2) 展開 $(x+p)^2 = x^2 + 2px + p^2$ を使いたいので $p = \frac{b}{2a}$ として (*) の両辺に $p^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ を加えると

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

因数分解と右辺の通分で $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, 平方根をとり $\frac{b}{2a}$ を移項して次の解の公式がえられます .

2次方程式の解の公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

解の判別 右辺根号内の式 $b^2 - 4ac$ を解の判別式といいます .

i) $b^2 - 4ac < 0$ のとき $ax^2 + bx + c = 0$ をみたす実数の解はありません . (2 乗して負になる実数はないので.)

ii) $b^2 - 4ac > 0$ なら相異なる 2 実数が解 .

iii) $b^2 - 4ac = 0$ なら $-\frac{b}{2a}$ のみが解 (重解) .

例題 k を定数とするととき, x の 2 次方程式 $x^2 + 2(k+1)x + k^2 + 2 = 0$ の実数解の個数を調べなさい .

(解) 判別式は

$$\{2(k+1)\}^2 - 4(k^2 + 2) = 4(k^2 + 2k + 1) - 4(k^2 + 2) = 4(2k - 1) .$$

したがって

$$k > \frac{1}{2} \text{ のとき } 2 \text{ 個} , \quad k = \frac{1}{2} \text{ のとき } 1 \text{ 個} , \quad k < \frac{1}{2} \text{ のとき } 0 \text{ 個} .$$

例題 次の 2 次方程式を解きなさい . (実数解がなければ「解なし」としなさい .)

$$(1) \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad (2) \quad x^2 + 2x - 9 = 0 \qquad (3) \quad 2x^2 + 2x + 3 = 0$$

(解) (1) 左辺を因数分解して $(x-3)(x+1) = 0$ となるので解は $x = -1, 3$.

(2) 左辺を平方完成させると $x^2 + 2x + 1 - 1 - 9 = (x+1)^2 - 10$, 方程式は $(x+1)^2 = 10$ となり $x+1 = \pm\sqrt{10}$, 解は $x = -1 \pm \sqrt{10}$.

(3) 判別式 ($b^2 - 4ac$) は $2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -20$ と負になり実数解はなし . 解なし .

数学添削問題 第2回

氏名 : _____

高校名 : _____

入学予定学科 : _____

1 次の2次方程式を因数分解により解きなさい.

(1) $x^2 - 13x + 36 = 0$ (2) $x^2 + 2x - 48 = 0$

(3) $2x^2 + 5x + 2 = 0$ (4) $6x^2 + x - 15 = 0$

2 次の2次方程式を $(x + p)^2 = k$ の形にして解きなさい.

(1) $x^2 + 4x - 3 = 0$ (2) $x^2 - 6x + 1 = 0$

(3) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ (4) $x^2 + 5x + 2 = 0$

3 次の2次方程式を解きなさい.

(1) $6x^2 + x - 1 = 0$ (2) $\frac{3}{4}x^2 - 9x + 6 = 0$

(3) $3x^2 - 3\sqrt{3}x + 2 = 0$ (4) $100x^2 - 25x + 1 = 0$

4 x の2次方程式 $2x^2 - 4x + a = 0$ が $x = 1 + \sqrt{3}$ を解にもつとき, a の値ともう1つの解を求めなさい.

5 a を正の整数とすると, 2次方程式 $x^2 - 8x + a + 1 = 0$ の解がすべて整数になるような a の値を求めなさい.

(4) 今回の添削問題に関する質問を以下にお書きください。

(5) 今回の添削問題に関する感想を以下にお書きください。

★ アンケートにご協力頂きありがとうございました。